

06-02 Matrices d'adjacence

Définitions et notation

Une **boucle** est une arête qui part d'un sommet et arrive au même sommet.

Un graphe **simple** ne contient pas de boucle.

Un **arc** est une arête ne pouvant se parcourir que dans un sens, indiqué par une flèche.

Un graphe est **orienté** lorsque ses arêtes sont des arcs.

Le **degré entrant** d'un sommet est le nombre d'arcs dirigés vers ce sommet.

Le **degré sortant** d'un sommet est le nombre d'arcs partant de ce sommet.

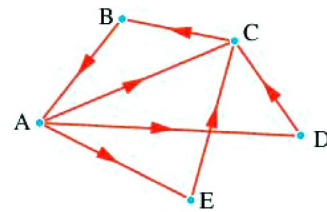
Exemple

Le graphe ci-contre est simple et orienté.

Il a pour ordre 5 et est composé de 7 arcs.

Le sommet A a pour degré entrant 1 et pour degré sortant 3.

Il y a exactement deux chemins de longueur 2 qui relient A à C.



Définitions et notation

Soit un graphe (orienté ou non) d'ordre n dont les sommets sont ordonnés.

La **matrice d'adjacence** du graphe est la matrice carrée dont chaque coefficient en ligne i colonne j est égal au nombre d'arêtes (ou d'arcs) reliant le sommet i au sommet j .

Exemples

Le graphe

a pour matrice d'adjacence

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le graphe

a pour matrice d'adjacence

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propriété

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe d'ordre n .

Dans la matrice M^p , le coefficient en ligne i colonne j est égal au nombre de chemins de longueur p reliant le sommet i au sommet j du graphe.

06-02 Applications du cours

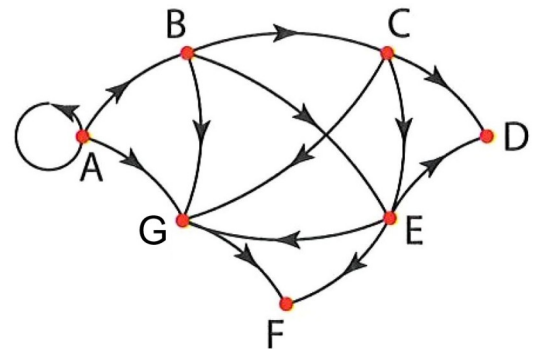
Application 1

Un graphe admet la matrice d'adjacence $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Le graphe est-il orienté ?
2. Le graphe est-il simple ?
3. Le graphe est-il complet ?
4. Quel est l'ordre du graphe ?
5. Quel est le nombre d'arêtes du graphe ?
6. Quel est le degré du deuxième sommet du graphe ?
7. Le graphe admet-il une chaîne eulérienne ?
8. Combien de chemins de longueur 2 relient le premier sommet à lui-même ?

Application 2

1. Déterminer la matrice d'adjacence M du graphe ci-contre.
2. a] Calculer M^4 .
b] On note $(M^4)_{ij}$ le coefficient de M^4 situé ligne i , colonne j .
Que vaut $(M^4)_{16}$? Interpréter ce résultat.
3. a] Déterminer M^5 sans calculatrice.
b] Quel calcul a permis d'obtenir $(M^5)_{16}$? Comment l'interpréter ?



Application 3

Un voyageur se promène dans les sept pays suivants :

Birmanie, Cambodge, Chine, Laos, Malaisie, Thaïlande, et Vietnam.

Déterminer de combien de façon différentes il peut aller du Cambodge au Vietnam en franchissant exactement 5 frontières.



Application 4

On souhaite organiser une chasse au trésor : cinq équipes partiront du départ **D** pour atteindre un trésor situé en **T** comme indiqué ci-contre.

Les cinq équipes suivront des parcours différents mais tous seront constitués du même nombre de chemins de randonnée, éventuellement empruntés plusieurs fois. Quel est le nombre minimum de ces chemins ?

